OPCIÓN A

1..- a) Calcula todas las matrices 2 x 2 de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}$ que satisfagan a la ecuación matricial $\mathbf{A^2 + 2A + 3I = 0}$**,** donde I es la matriz identidad. O sea calcular la expresión de c en función de a **(5 puntos)**

b) Demuestra que las matrices del apartado anterior son invertibles y calcular su inversa

(5 puntos)

$a)$

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+c & a-2-a \\ ac+(-2-a)c & c+(-2-a)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+c & -2 \\ -2c & c+(-2-a)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2+2A+3I=\begin{pmatrix} a^2+c & -2 \\ -2c & c+(-2-a)^2 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2+2A+3I=\begin{pmatrix} a^2+c & -2 \\ -2c & c+(-2-a)^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2c & -4-2a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2+2A+3I=\begin{pmatrix} a^2+2a+c+3 & 0 \\ 0 & c+(-2-a)^2-4-2a+3 \end{pmatrix}$$

$$A^2+2A+3I=\begin{pmatrix} a^2+2a+c+3 & 0 \\ 0 & a^2+2a+c+3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^2+2A+3I=0\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2+2a+c+3 & 0 \\ 0 & a^2+2a+c+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow a^2+2a+c+3=0\Rightarrow$$

$$a^2+2a+1+c+2=0\Rightarrow (a+1)^2+c+2=0\Rightarrow c=-2-(a+1)^2\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2-(a+1)^2 & -2-a \end{pmatrix}$$ b)

Una matriz tiene inversa si su determinante no es nulo

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 \\ -2-(a+1)^2 & -2-a \end{vmatrix}=-2a-a^2+2+(a+1)^2=-2a-a^2+2+a^2+2a+1=3\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} a & -2-(a+1)^2 \\ 1 & -2-a \end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix} -2-a & -1 \\ 2+(a+1)^2 & a \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -2-a & -1 \\ 2+(a+1)^2 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2+a}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2+(a+1)^2}{3} & \frac{a}{3} \end{pmatrix}$$

2.- Demostrar que las rectas siguientes $r_1:\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ y-z=2 \end{cases}$ $r_2:\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x+z=-4 \end{cases}$ se cortan **(5 puntos)** y calcular el punto de corte **(5 puntos)**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.
Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} y=2+z \Rightarrow x+4+2z+3z=-1 \Rightarrow x=-5-5z \Rightarrow r_1:\begin{cases} x=-5-5\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ z=-4-2x \Rightarrow x+y-4-2x=-1 \Rightarrow y=3+x \Rightarrow r_2:\begin{cases} x=\mu \\ y=3+\mu \\ z=-4-2\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5-5\lambda=\mu \\ 2+\lambda=3+\mu \Rightarrow \\ \lambda=-4-2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\lambda+\mu=-5 \\ \lambda-\mu=1 \\ \lambda+2\mu=-4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & -10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang(A)=rang(A/B)=2=\text{número de incognitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow$$

$$\text{Se cortan en un punto o son coincidentes}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}}=(-5,1,1) \\ \overrightarrow{v_{r_2}}=(1,1,-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{-5}{1} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \text{No son coincidentes}$$

$$\text{Se cortan en un punto, son secantes}$$

$b)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 3\mu=-5 \Rightarrow \mu=-\frac{5}{3} \Rightarrow \text{Punto de corte} \Rightarrow P\begin{cases} x=-\frac{5}{3} \\ y=3+\left(-\frac{5}{3}\right) \\ z=-4-2\left(-\frac{5}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

3.- Sea **a** un valor estrictamente positivo. Consideremos la función polinómica dependiente de **a**: **f (x) = x³ + a x + 1**.

a) Demostrar que la ecuación **f (x) = 0** sólo puede tener como máximo una solución. **(5 puntos)**

b) Demostrar que la solución del apartado anterior existe y está entre **-1** y **0**. **(5 puntos)**

$a)$

$$\begin{cases} y = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3 + ax + 1\right) = \infty \\ y = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 + ax + 1\right) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Re}corrido\,(f) = \forall x \in \Re$$

$$f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow 3x^2 + a = 0 \Rightarrow 3x^2 = -a \Rightarrow x^2 = -\frac{a}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$$Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 + a > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re$$

Al ser creciente en todo el recorrido de la recta real, solo puede haber un solo punto de corte en el ele de abcisas que determina que **f (x) = 0**

b) Teniendo en cuenta el Teorema de Bolzano que determina que si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f(c) = 0**

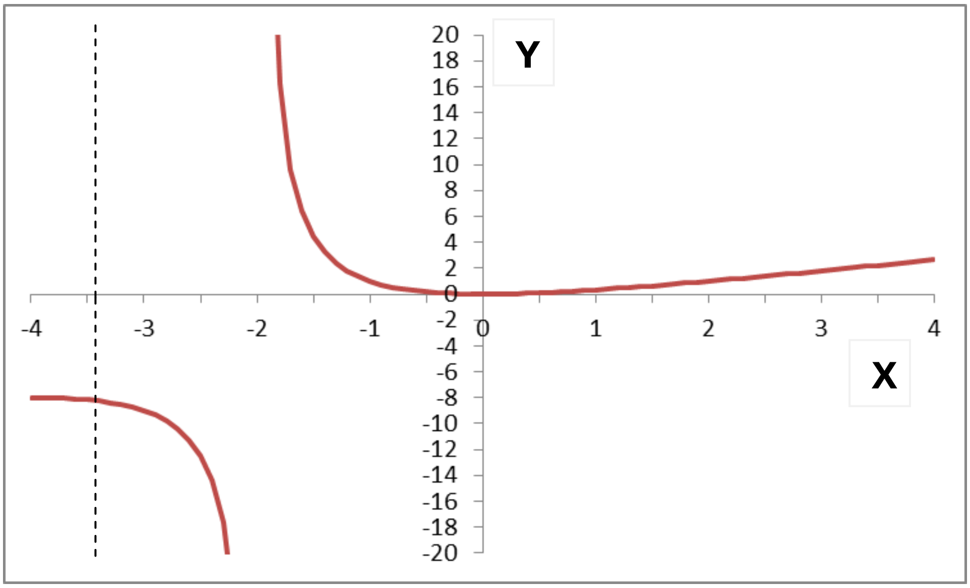
La función dada **f (x) = x³ + a x + 1** es continua en todo su dominio, que es la recta real, y además es derivable en todo ese dominio por lo tanto en el intervalo **[-1 , 0]** y como:

f (-1) = (-1) ³ + a (-1) + 1 = -1 – a +1 = -a < 0 ya que **a** es positivo
f (0) = 0 ³ + a . 0 + 1 = 1 > 0

por lo tanto **[sign f(-1) $\neq$ sign f(0)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (-1\ , 0)$ tal que **f(c) = 0** que es la única solución posible

4.- Haz un dibujo del recinto limitado por la curva $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ entre los valores **x = -1, x = 1** y el eje OX **(3 puntos).** Calcula el área de este recinto **(7 puntos).**

a)



Continuación del ejercicio 4 de la opción A

b)

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 & \underline{x+2} \\
\underline{-x^2-2x} & x-2 \\
\quad -2x & \\
\quad \underline{2x+4} & \\
\qquad 4 &
\end{array}
$$

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x+2}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx=\int_{-1}^{1}(x-2)\,dx+\int_{-1}^{1}\frac{4}{x+2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{1}-2\cdot\left[x\right]_{-1}^{1}+4\int_{1}^{3}\frac{dt}{t}$$

$$x+2=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\ x=-1\Rightarrow t=1\end{cases}$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left[1^2-(-1)^2\right]_{-1}^{1}-2\cdot\left[1-(-1)\right]+4\cdot\left[\ln t\right]_{1}^{3}=\frac{1}{2}\cdot(1-1)-2\cdot(1+1)+4\cdot(\ln 3-\ln 1)$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 0-2\cdot 2+4\cdot(\ln 3-0)=-4+4\cdot\ln 3=\left[4\cdot(\ln 3-1)\right]u^2$$

OPCIÓN B

1..- Demostrar que los puntos **P_1(2 , 1 , 1)**, **P_2(5 , 2 , 1), P_3(9 , 1 , 0),** y **P_4(11 , 4 , 1)** son coplanarios por el punto **(5 puntos)** y calcula la ecuación del plano que los contiene

(5 puntos)

Procederemos primero a hallar el plano π que contiene a los puntos **P_1**, **P_2** y **P_3**, para posteriormente analizar si el punto **P_4** pertenece a él

Para determinar el plano π hallaremos los vectores **P_1P_2, P_1P_3** y **P_1G**, siendo G el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **P_1G** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} = (5\,,2\,,1)-(2\,,1\,,1)=(3\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (9\,,1\,,0)-(2\,,1\,,1)=(7\,,0\,,-1) \\ \overrightarrow{P_1G} = (x\,,y\,,z)-(2\,,1\,,1)=(x-2\,,y-1\,,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-2)-7(z-1)+3(y-1)=0 \Rightarrow (x-2)-3(y-1)+7(z-1)=0 \Rightarrow \pi \equiv x-3y+7z-6=0 \Rightarrow$$

$$Veamos\ si\ P_4\ \ pertenece\ al\ \ plano\ \pi \Rightarrow 11-3\cdot 4+7\cdot 1-6=0 \Rightarrow 18-18=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow$$

$$P_4\ es\ coplanario\ con\ P_1, P_2\ \ y\ P_3$$

2.- Discutir el siguiente sistema según el valor del parámetro **b**: $\begin{cases} 3x+6y+9z=1 \\ 3x+by+bz=1 \\ bx+y-z=1 \end{cases}$ **(7 puntos)**

Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado **(3 puntos)**

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & b & b \\ b & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3b+6b^2+27-9b^2-3b+18 = -3b^2-6b+45 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -3b^2-6b+45=0 \Rightarrow$$

$$(-3)(b^2+2b-15)=0 \Rightarrow b^2+2b-15=0 \Rightarrow \Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64 \ge 0 \Rightarrow b=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b=\dfrac{-2+8}{2}=3 \\ b=\dfrac{-2-8}{2}=-5 \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \Re - \{-5\,,3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ b=-5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 9 & 1 \\ 3 & -5 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 9 & 1 \\ 3 & -5 & -5 & 1 \\ -15 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & -11 & -14 & 0 \\ 0 & 33 & -42 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & -11 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang(A)=2 \neq rang(A/B)=3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Continuación del ejercicio 2 de la opción B

$Si\ b=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 6 & 9 & 1\\ 3 & 3 & 3 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 6 & 9 & 1\\ 0 & -3 & -6 & 0\\ 0 & -5 & -10 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 6 & 9 & 1\\ 0 & -3 & -6 & 0\\ 0 & 15 & 30 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 6 & 9 & 1\\ 0 & -3 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$Si\ b=3\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 6 & 9 & 1\\ 0 & -3 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow -3y-6z=0\Rightarrow 3y=6z\Rightarrow y=2z\Rightarrow 3x+12z+9z=1\Rightarrow 3x=1-21z\Rightarrow$$

$$x=\frac{1-21z}{3}\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(\frac{1}{3}-7\lambda\ ,\ 2\lambda\ ,\ \lambda\right)$$

3.- Determinar los máximos y los mínimos de la función $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$. **(10 puntos)**

$$f'(x)=\frac{1+x+x^2-(1+2x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}=\frac{1+x+x^2-(1+x+2x+2x^2)}{(1+x+x^2)^2}=\frac{1+x+x^2-1-3x-2x^2}{(1+x+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x}{(1+x+x^2)^2}=(-1)\frac{x(x+2)}{(1+x+x^2)^2}\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow(-1)\frac{x(x+2)}{(1+x+x^2)^2}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-1<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x>0\\ x+2>0\Rightarrow x>-2\\ (1+x+x^2)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$	**-2**	**0** ∞
-1 < 0	**(-)**	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > -2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
(1 + x + x²)² > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Creciente $\forall x\in\Re/-2<x<0$ **Decreciente** $\forall x\in\Re/(x<-2)\cup(x>0)$

Mínimo relativo en x = -2 $\Rightarrow f(-2)=\dfrac{1+(-2)}{1+(-2)+(-2)^2}=\dfrac{-1}{1-2+4}=-\dfrac{1}{3}$ (pasa de decrecimiento a crecimiento)

Máximo relativo en x = 0 $\Rightarrow f(0)=\dfrac{1+0}{1+0+0^2}=1$ (pasa de crecimiento a decrecimiento)

4.- Calcula la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int\frac{1}{2x^2+4}dx$ **(10 puntos)**

$$2x^2+4=0 \Rightarrow 2x^2=-4 \Rightarrow x^2=-\frac{4}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{-2} \Rightarrow \textit{Sin solución real}$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{4}\,arc\ tg\ t$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}}=t \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{2}}=dt \Rightarrow dx=\sqrt{2}\,dt$$

$$I=\frac{\sqrt{2}}{4}\,arc\ tg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+K$$